মেট্ৰিক্সৰ এড্‌জইণ্ট : Adjoint of the Matrix

এটা সহ-উৎপাদক মেট্ৰিক্স (C_{ij})ৰ ট্ৰান্সপ'জ হৈছে মেট্ৰিক্সৰ এড্‌জইণ্ট। ইয়াক Adj(A) ৰে সূচীত কৰা হয়। মেট্ৰিক্সৰ এড্‌জইণ্ট ৰূপে পাবলৈ হ'লে সহ-উৎপাদক মেট্ৰিক্সৰ শাৰীসমূহক অনুৰূপ স্তম্ভলৈ স্থানান্তৰিত কৰা বা স্তম্ভসমূহক অনুৰূপ শাৰীসমূহলৈ স্থানান্তৰিত কৰা। ইতিমধ্যে নিৰ্দ্ধাৰণ কৰা সহ-উৎপাদক মেট্ৰিক্সৰ ৰূপটো হ'ল-

A- মেট্ৰিক্সৰ সহ-উৎপাদক $= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ইনভাৰ্চ্ মেট্ৰিক্স : Inverse Matrix

যদি A এটা মেট্ৰিক্স আৰু ইয়াৰ ইনভাৰচ্ বা বিপৰীত ৰূপ A^{-1} হয়, তেন্তে সিহঁতৰ মাজৰ পূৰণফল একক মেট্ৰিক্স (Identity matrix) ৰ সমান হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ

$A \times A^{-1} = I$, I => Identity matix

ইয়াত A^{-1} ক A মেট্ৰিক্সৰ ইনভাৰচ্ বুলি পঢ়া হয়। A^{-1} ক সংজ্ঞা দিব পাৰি যদিহে A এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্স হয়।

ইনভাৰ্চ্ মেট্ৰিক্স স্থিত : Existence of inverse matix

১. A^{-1} ক ইনভাৰ্চ্ হিচাপে সংজ্ঞা দিব পাৰি যদিহে A এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্স হয়।

২. A এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্স হ'লেই নহব, ই Non-singular matrix হ'ব লাগিব , অৰ্থাৎ ($|A| \neq 0$)।

৩. যদি A^{-1} স্থিত হয় তেতিয়া A ক A^{-1} ৰ ইনভাৰ্চ্ বুলিব পাৰি, যেনেদৰে A^{-1} ক A ৰ ইনভাৰ্চ্ বোলা হয়। অৰ্থাৎ- $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

ইনভাৰ্চ্ মেট্ৰিক্স নিৰ্দ্ধাৰণ : Computation of inverse matrix

সূত্ৰৰ সাধাৰণ ৰূপ :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}(A) \qquad \text{or} \qquad A^{-1} = \frac{\text{Adi (A)}}{|A|}$$

ইয়াত, $|A| \neq 0$

পদক্ষেপসমূহ : Steps

১. বিবেচিত মেট্ৰিক্সটো বৰ্গ মেট্ৰিক্স হয় নে নহয় তাক পৰীক্ষা কৰা।

২. বিবেচিত মেট্ৰিক্স A ৰ নিৰ্ণায়ক মান নিৰ্দ্ধাৰণ ($|A| = ?$)। যদি $|A| \neq 0$ তেতিয়া হ'লে আমি তৃতীয় পদক্ষেপলৈ আগবাঢ়িব পাৰো। কিন্তু যদি $|A| = 0$, তেতিয়া ইনভাৰ্চ্ নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব নোৱাৰি অৰ্থাৎ প্ৰক্ৰিয়াটো অনিৰ্ণায়ক (Indeterminate) হ'ব।

৩. অনুৰাশি (M_{ij}) আৰু সহ-উৎপাদক (C_{ij}) নিৰ্দ্ধাৰণ।

৪. এডজইৰ্ন মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয় অৰ্থাৎ [Adj (A) = (?)]। অৰ্থাৎ সহ-উৎপাদক মেট্ৰিক্সক ট্ৰান্সপ'জ কৰা।

৫. ইনভাৰ্চ্ পৰিমাপ কৰা অৰ্থাৎ ($A^{-1} = ?$)।

৬. $A^{-1}A = I$ ৰ দ্বাৰা ইনভাৰ্চ্ পৰীক্ষা কৰা।

উদাহৰণ

i) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad A^{-1} = ?$

সমাধান :

প্ৰথম পদক্ষেপ : মেট্ৰিক্সৰ পৰীক্ষা

A এটা 2×2 মাত্ৰাৰ বৰ্গ মেট্ৰিক্স।

দ্বিতীয় পদক্ষেপ : নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয়

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \qquad \therefore |A| = 2 \neq 0$

যিহেতু $|A| = 2$, গতিকে A এটা Non-singular matrix।

তৃতীয় পদক্ষেপ : সহ-উৎপাদকসমূহৰ নিৰ্ণয়

A মেট্ৰিক্সৰ সহ-উৎপাদকসমূহ $= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

চতুৰ্থ পদক্ষেপ : এডজইণ্ট মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$\text{Adj (A)} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

পঞ্চম পদক্ষেপ : ইনভাৰ্চ্ মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ষষ্ঠ পদক্ষেপ : ইনভাৰ্চ্ মেট্ৰিক্সৰ পৰীক্ষা

$A^{-1}A = I$

L.H.S. $= A^{-1}A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 3 + (-2) \times 1 & 1 \times 4 + (-2) \times 2 \\ \frac{-1}{2} \times 3 + \frac{3}{2} \times 1 & \frac{-1}{2} \times 4 + \frac{3}{2} \times 2 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Proved, $\quad \therefore$ L.H.S = R.H.S.

i) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$

সমাধান :

প্ৰথম পদক্ষেপ : মেট্ৰিক্সৰ পৰীক্ষা

A এটা 3×3 মাত্ৰাৰ বৰ্গ মেট্ৰিক্স।

দ্বিতীয় পদক্ষেপ : নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয়

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \qquad \therefore |A| = -12 \neq 0$$

যিহেতু $|A| = -12$, গতিকে A এটা Non-singular matrix।

তৃতীয় পদক্ষেপ : সহ-উৎপাদকসমূহৰ নিৰ্ণয়

$$A \text{ মেট্ৰিক্সৰ সহ-উৎপাদকসমূহ} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -2 & -7 & 10 \\ -2 & 11 & -14 \end{bmatrix}$$

চতুৰ্থ পদক্ষেপ : এড্‌জইন্ট মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -5 & -7 & 11 \\ 2 & 10 & -14 \end{bmatrix}$$

পঞ্চম পদক্ষেপ : ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -5 & -7 & 11 \\ 2 & 10 & -14 \end{bmatrix}}{-12}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{-12} & \frac{-2}{-12} & \frac{-2}{-12} \\ \frac{-5}{-12} & \frac{-7}{-12} & \frac{10}{-12} \\ \frac{2}{-12} & \frac{10}{-12} & \frac{-14}{-12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & \frac{5}{-6} \\ \frac{1}{-6} & \frac{5}{-6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

বৈখিক সহ সমীকৰণ সমাধানত ইনভাৰচ মেট্ৰিক্স কৌশলৰ প্ৰয়োগ

Application of Inverse Matrix Technique in the Solution of Linear Simultaneous Equations

দুটা পদ্ধতিৰ দ্বাৰা বৈখিক সহসমীকৰণ সমাধান কৰিব পাৰি। এটা হৈছে ক্ৰেমাৰৰ নিয়ম আৰু আনটো হৈছে ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স কৌশল। আগৰ অধ্যায়ত ক্ৰেমাৰৰ নিয়মৰ প্ৰয়োগ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হৈছে। ইয়াত ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স কৌশল সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হ'ব।

ধৰা হওঁক দুটা অজ্ঞাত চলক x আৰু y ৰ বাবে দুটা সহসমীকৰণ আছে। গতিকে -

$$a_{11}x + a_{12}y = c_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = c_2$$

উক্ত সমীকৰণদ্বয়ৰ মেট্ৰিক্স ৰূপটো হ'ব :

$$\underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{\substack{\downarrow \\ X}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\downarrow \\ C}}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

ধৰা হওক,

$$\Rightarrow AX = C \qquad \therefore X = A^{-1}C$$

$$\text{যত, } A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} \qquad \text{আৰু } |A| \neq 0$$

টোকা : যদি $|A| \neq 0$ হয় তেতিয়া চলকৰ মানসমূহ একক তথা নিৰ্ণায়ক হয়। কিন্তু $|A| = 0$ হ'লে চলকৰ মানসমূহ একক ৰূপত পোৱা নাযায়, অৰ্থাৎ অনিৰ্ণায়ক (indeterminant) হয় বা অসীম হয়।

উদাহৰণ :

i) ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স কৌশলৰ দ্বাৰা তলত উল্লেখ কৰা সহ-সমীকৰণদ্বয়ক সমাধান কৰা।

$$2x + 3y - 7 = 0$$
$$4x + 2y - 10 = 0$$

সমাধান :

$$2x + 3y = 7 \text{ .... (1)}$$
$$4x + 2y = 10 \text{ .... (2)}$$

প্ৰথম পদক্ষেপ : সহসমীকৰণদ্বয়ক মেট্ৰিক্সলৈ ৰূপান্তৰ

$$\underset{\substack{\downarrow \\ A}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}} \underset{\substack{\downarrow \\ X}}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\downarrow \\ C}}{\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

ধৰাহওঁক,

$$\Rightarrow AX = C \qquad \therefore X = A^{-1}C$$

যত, $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$

দ্বিতীয় পদক্ষেপ : নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয়

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8$ $\quad \therefore |A| = -8 \neq 0$

যিহেতু $|A| = -8$, গতিকে A এটা Non-singular matrix।

তৃতীয় পদক্ষেপ : সহ-উৎপাদকসমূহৰ নিৰ্ণয়

A মেট্ৰিক্সৰ সহ-উৎপাদকসমূহ = $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

চতুৰ্থ পদক্ষেপ : এড্জইন্ট মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

পঞ্চম পদক্ষেপ : ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{-8}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{-8} & \frac{-3}{-8} \\ \frac{-4}{-8} & \frac{2}{-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{-4} \end{bmatrix}$$

ষষ্ঠ পদক্ষেপ : চলকসমূহৰ মান নিৰ্ণয়

$$X = A^{-1}C$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{-4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \times 7 + \frac{3}{8} \times 10 \\ \frac{1}{2} \times 7 + (\frac{-1}{4}) \times 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{8} \\ \frac{4}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

সপ্তম পদক্ষেপ : মানসমূহৰ পৰীক্ষণ

$2x + 3y = 7$ .... (1) আৰু $4x + 2y = 10$ .... (2)

$2(2) + 3(1) = 7$ $\qquad$ $4(2) + 2(1) = 10$

$4 + 3 = 7$ $\qquad$ $8 + 2 = 10$

$7 = 7$ $\qquad$ $10 = 10$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S, $\qquad$ $\therefore$ L.H.S. = R.H.S,

উত্তৰসমূহ : $x = 2, y = 1$

অৰ্থবিজ্ঞানৰ উদাহৰণ :

তিনিটা দ্ৰব্য যথাক্ৰমে x, y আৰু z ৰ সূচক সংখ্যা নিৰূপণৰ বাবে এখন বজাৰত জৰীপ কাৰ্যসম্পাদানৰ উদ্দেশ্যে প্ৰতিটো দ্ৰব্যৰ তিনিটা শ্ৰেণীত কিছুমান স্থিৰ বা নিৰ্দিষ্ট ভাৰ প্ৰদান কৰা হৈছে।

Commodities	Varieties			Total Cost
	I	II	III	
x	1	2	3	11
y	2	4	5	21
z	3	5	6	27

ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স কৌশল প্ৰয়োগ কৰি তিনি প্ৰকাৰ শ্ৰেণীৰ বাবে প্ৰদান কৰা ভাৰ মানসমূহ (weights) ক্ৰমান্বয়ে নিৰ্ধাৰণ কৰা।

সমাধান :

প্ৰথম পদক্ষেপ : সমীকৰণসমূহ নিৰ্ণয়

$1.x + 2.y + 3.z = 11$ .... (1)

$2.x + 4.y + 5z = 21$ .... (2)

$3.x + 5.y + 6.z = 27$ .... (3)

দ্বিতীয় পদক্ষেপ : সহসমীকৰণসমূহৰ মেট্ৰিক্স ৰূপে প্ৰদান

$$\underset{\downarrow \atop A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \underset{\downarrow \atop X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{\downarrow \atop C}{\begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 27 \end{bmatrix}}$$

ধৰাহওঁক,

$\Rightarrow AX = C$ $\qquad$ $\therefore X = A^{-1}C$

যত, $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$

তৃতীয় পদক্ষেপ : নিৰ্ণায়কৰ মান নিৰ্ণয়

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \qquad \therefore |A| = -1 \neq 0$$

যিহেতু $|A| = -1$, গতিকে A এটা Non-singular matrix।

চতুৰ্থ পদক্ষেপ : সহ-উৎপাদকসমূহৰ নিৰ্ণয়

$$\text{A মেট্ৰিক্সৰ সহ-উৎপাদকসমূহ} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

পঞ্চম পদক্ষেপ : এড্‌জইণ্ট মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$$\therefore Adj\,(A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ষষ্ঠ পদক্ষেপ : ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স নিৰ্ণয়

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{-1} & \frac{3}{-1} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{3}{-1} & \frac{-3}{-1} & \frac{1}{-1} \\ \frac{-2}{-1} & \frac{1}{-1} & \frac{0}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

সপ্তম পদক্ষেপ : চলকসমূহৰ মান নিৰ্ণয়

$$X = A^{-1}C$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 11 + (-3) \times 21 + 2 \times 27 \\ -3 \times 11 + 3 \times 21 + (-1) \times 27 \\ 2 \times 11 + (-1) \times 21 + 0 \times 27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 - 63 + 54 \\ -33 + 63 - 27 \\ 22 - 21 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

উত্তৰসমূহ : ভাৰসাম্য ভাৰমানসমূহ $x = 2, \quad y = 3, \quad z = 1$

টোকা : ইনভাৰচ্ মেট্ৰিক্স কৌশলক উৎপাদক-উৎপন্ন আৰ্হি (Input-Output Model) ত বিস্তৃত ভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

Exercise

1. Find A+B, A–B amd 2A –3B +4C for the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Verify that $(A + B) - C = A + (B - C)$

3. If $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $B = [\,4 \quad 2 \quad -1 \quad 0\,]$, Find AB and BA.