মেট্ৰিক্স বীজগণিত
Algebra of Matrices

১. মেট্ৰিক্সৰ যোগ :Matrix Addition

দুটা মেট্ৰিক্সক যোগ কৰিব পাৰি যদি সিহঁতৰ মাত্ৰা একে হয়। একে মাত্ৰাৰ দুটা মেট্ৰিক্সৰ অনুৰূপ স্থানৰ উপাদানবোৰক যোগ কৰি যি নতুন মেট্ৰিক্স পোৱা যায় তাক মেট্ৰিক্স দুটাৰ যোগফল বোলা হয়।

সংকেতত : যদি

$$A = [a_{ij}] \quad \text{আৰু } B = [b_{ij}]$$

$$\therefore \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ হ'লে,

(A + B) নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান:

যিহেতু A আৰু B ৰ মাত্ৰা 2×2 অৰ্থাৎ একে। গতিকে A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটা যোগফল নিৰ্দ্ধাৰণৰ উপযোগী (Conformable for addition)।

$$A + B = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}} + \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-3) & 0+6 \\ -5+4 & 6+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ হয়,

তেতিয়াহ'লে (A + B) নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান:

যিহেতু A আৰু B ৰ মাত্ৰা একে নহয় গতিকে A আৰু B যোগফল নিৰ্দ্ধাৰণৰ উপযোগী নহয় (Non-conformable for addition)। কাৰণ A ৰ মাত্ৰা 3×2 আৰু B ৰ মাত্ৰা 2×2।

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ আৰু $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

তেন্তে A + B + C = ?

সমাধান:

A + B + C নিৰ্দ্ধাৰণৰ উপযোগী নহয়, কাৰণ মেট্ৰিক্সবোৰ মাত্ৰা ভিন্ন অৰ্থাৎ A মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰা 3 × 2 , B মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰা 2 × 3 আৰু C মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰা 3 × 2 । গতিকে মেট্ৰিক্সসমূহৰ যোগফল নিৰ্দ্ধাৰণ উপযোগী নহয়।

(iv) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ আৰু $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

তেন্তে দেখুওৱা যে (a) A + B = B + A

(b) A + (B + C) = (A + B) + C

সমাধান:

(a) A+B = B+A

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = B + A$$

(b) A+(B+C) = (A+B)+C

$$B+C = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 9 \\ 2 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 9 \\ 2 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + (B + C) = (A + B) + C$$

মেট্ৰিক্সৰ যোগ বিধি (Laws of Mtrix Addition) :

মেট্ৰিক্সৰ যোগ বিধিসমূহ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল -

(i) সাহচৰ্য বিধি (Associate law) : $A+B = B+A$

(ii) ক্ৰম বিনিময় বিধি (Commutative Law): $A+(B+C) = (A+B)+C$

(iii) নিৰপেক্ষৰ অৱস্থিতি (Existence of Identity): $A+0 = 0+A = A$

(iv) মেট্ৰিক্সৰ যোগ বিলোপন বিধি (Cancellation Law):

$A+B = A+C$ হ'লে $B = C$ হ'ব।

(v) বিপৰীতৰ অৱস্থিতি (Existence of the Inverse) :

যদি $A + X = 0$, হ'লে $X = -A$ হ'ব।

২. মেট্ৰিক্সৰ বিয়োগ (Matrix Substraction)

দুটা মেট্ৰিক্সক বিয়োগ কৰিব পাৰি যদিহে সিহঁতৰ মাত্ৰা একে হয়। একে মাত্ৰাৰ দুটা মেট্ৰিক্সৰ অনুৰূপ স্থানৰ উপাদানবোৰক বিয়োগ কৰি যি নতুন মেট্ৰিক্স পোৱা যায় তাক মেট্ৰিক্স দুটাৰ বিয়োগফল বোলা হয়।

সংকেতত :

যদি $A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{ij}]$, হয়, তেতিয়া হ'লে $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$।

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$,

(A – B) নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান:

$$A - B = \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}} - \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-10) & (5-2) \\ (6-8) & (7-6) \end{bmatrix} = \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}$$

(ii) যদি $A = [1 \quad 5]$ আৰু $B = [10 \quad 2 \quad 3]$,

(A – B) নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান:

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটাৰ মাজত বিয়োগফল নিৰ্ধাৰণ উপযোগী নহয় (Non-conformable for substraction)। কাৰণ A আৰু B মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰা একে নহয় অৰ্থাৎ A মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰা 1×2 আৰু B মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰা 1×3।

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ আৰু $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(A + B) - C = A + (B - C)$

সমাধান:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B) - C = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B - C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A+(B-C) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A+B)-C = A+(B-C)$

৩. মেট্ৰিক্সৰ পূৰণফল (Matrix Multiplication) :

(ক) মেট্ৰিক্সক সংখ্যাৰে পূৰণ বা অদিশ পূৰণফল

Multiplication of a matrix by a number or scalar multiplication

ধৰা $m \times n$ মাত্ৰাযুক্ত A মেট্ৰিক্সক এটা সংখ্যা বা এটা অদিশ K ৰে পূৰণ কৰিবলৈ হ'লে, আমি A মেট্ৰিক্সৰ প্ৰতিটো মৌল বা উপাদানক K ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব। ফলস্বৰূপে যি নতুন মেট্ৰিক্স হ'ব তাক KA ৰে সূচোৱা হয় আৰু ইয়াৰ মাত্ৰা $n \times m$ অৰ্থাৎ A মেট্ৰিক্সৰ মাত্ৰাৰ সদৃশ হ'ব।

সাংকেতিকভাৱে,

$$KA = K\,[a_{ij}] = [Ka_{ij}]$$

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$, KA নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান :

$$KA = K\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} \\ Ka_{21} & Ka_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, 3A নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান :

$$3A = 3\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $-4A$ নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান :

$$-4A = -4\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 16 & -24 & 32 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

(খ) এটা শাৰী মেট্ৰিক্স আৰু এটা স্তম্ভ মেট্ৰিক্সৰ পূৰণফল বা দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণফল

Multiplication of a row matrix and a column matrix or multiplication of two vectors

দুটা মেট্ৰিক্সৰ পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব পৰা যায় যদিহে প্ৰথমটো মেট্ৰিক্সৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা দ্বিতীয়টো মেট্ৰিক্সৰ শাৰীৰ সংখ্যাৰ সমান হয়। অৰ্থাৎ A আৰু B দুটা ভেক্টৰ বা মেট্ৰিক্সৰ মাজত পূৰণফল তেতিয়াহে সম্ভৱ হয় যেতিয়া ভেক্টৰ দুটাৰ মাজত পূৰণফলৰ নিৰ্দ্ধাৰণ উপযোগী হয়। কিন্তু দুটা শাৰী মেট্ৰিক্স বা দুটা স্তম্ভ মেট্ৰিক্সৰ মাজত পূৰণফলৰ নিৰ্দ্ধাৰণৰ উপযোগী নহয়।

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = [a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]_{1\times 3}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $AB = ?$

সমাধান :

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটাৰ মাজত পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণ উপযোগী কাৰণ প্ৰথম শাৰী মেট্ৰিক্স A ৰ স্তম্ভ সংখ্যা দ্বিতীয় স্তম্ভ মেট্ৰিক্স B ৰ শাৰীৰ সংখ্যাৰ সমান। গতিকে নতুন মেট্ৰিক্সটো হ'ব 1×1 মাত্ৰাৰ।

$$AB = [a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]_{1\times 3} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$= [a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3]_{1\times 1}$$

(ii) যদি $A = \underset{4\times1}{\begin{bmatrix}5\\6\\3\\2\end{bmatrix}}$ আৰু $B = \underset{1\times5}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & 3 & 5\end{bmatrix}}$, $AB = ?$

সমাধান :

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটাৰ মাজত পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণ উপযোগী কাৰণ প্ৰথম মেট্ৰিক্স A ৰ স্তম্ভ আৰু দ্বিতীয় মেট্ৰিক্স B ৰ শাৰীৰ সংখ্যাৰ সমান। গতিকে নতুন মেট্ৰিক্সটো হ'ব 4×5 মাত্ৰাৰ।

$$AB = \begin{bmatrix}5\times1 & 5\times2 & 5\times6 & 5\times3 & 5\times5\\ 6\times1 & 6\times2 & 6\times6 & 6\times3 & 6\times5\\ 3\times1 & 3\times2 & 3\times6 & 3\times3 & 3\times5\\ 2\times1 & 2\times2 & 2\times6 & 2\times3 & 2\times5\end{bmatrix}$$

$$A = \underset{4\times5}{\begin{bmatrix}5 & 10 & 30 & 15 & 25\\ 6 & 12 & 36 & 18 & 30\\ 3 & 6 & 18 & 9 & 15\\ 2 & 4 & 12 & 6 & 10\end{bmatrix}}$$

(iii) যদি $A = \underset{1\times3}{\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}}$ আৰু $B = \underset{1\times3}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\end{bmatrix}}$, $AB = ?$

সমাধান :

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটা পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণৰ বাবে উপযোগী নহয়। কাৰণ A মেট্ৰিক্সৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 3 টা), B মেট্ৰিক্সৰ শাৰীৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 1 টা)ৰ সমান নহয়।

(iv) যদি $A = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}}$ আৰু $B = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}}$, $AB = ?$

সমাধান :

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটা পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণৰ বাবে উপযোগী নহয়। কাৰণ A মেট্ৰিক্সৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 1 টা), B মেট্ৰিক্সৰ শাৰীৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 3 টা)ৰ সমান নহয়।

(গ) দুটা মেট্ৰিক্সৰ পূৰণফল বা মেট্ৰিক্সৰ পূৰণফল

Product of two matrices or matrix multiplication

দুটা মেট্ৰিক্সৰ পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰিব পৰা হয় যদিহে প্ৰথমটো মেট্ৰিক্সৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা

দ্বিতীয়টো মেট্ৰিক্সৰ শাৰীৰ সংখ্যাৰ সমান হয়। অৰ্থাৎ A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটাৰ পূৰণফল AB যে সূচোৱা হয় আৰু পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি যদিহে A ৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা আৰু B ৰ শাৰীৰ সংখ্যা একে হয়। AB ৰ পূৰণফলত A ক পূৰ্ববৰ্তী গুণনীয়ক (Prefactor) আৰু B ক পৰবৰ্তী গুণনীয়ক (Post factor) বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}}$ আৰু $B = \underset{3\times2}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}}$, $AB = ?$

সমাধান :

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটা পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণৰ বাবে উপযোগী। কাৰণ A মেট্ৰিক্সৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 3 টা), B মেট্ৰিক্সৰ শাৰীৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 3 টা) ৰ সমান। গতিকে AB মেট্ৰিক্সটোৰ মাত্ৰা 2 × 2 হ'ব।

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\times1 + 1\times0 + 2\times3 & 2\times2 + 1\times1 + 2\times4\\ 3\times1 + 0\times0 + 1\times3 & 3\times2 + 0\times1 + 1\times4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2+0+6 & 4+1+8\\ 3+0+3 & 6+0+4\end{bmatrix}$$

$$= \underset{2\times2}{\begin{bmatrix}8 & 13\\ 6 & 10\end{bmatrix}}$$

(ii) যদি $A = \underset{3\times2}{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}}$ আৰু $B = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}}$, $AB = ?$

সমাধান :

A আৰু B মেট্ৰিক্স দুটা পূৰণফল নিৰ্দ্ধাৰণৰ বাবে উপযোগী। কাৰণ A মেট্ৰিক্সৰ স্তম্ভৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 2 টা), B মেট্ৰিক্সৰ শাৰীৰ সংখ্যা (অৰ্থাৎ 2 টা) ৰ সমান। গতিকে AB মেট্ৰিক্সটোৰ মাত্ৰা 3 × 2 হ'ব।

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$