মেট্ৰিক্স বা মৌলকক্ষ
Matrices

সংজ্ঞা
Definition

1858, অধ্যাপক কেইল (ইংৰাজ গণিতজ্ঞ) এ মেট্ৰিক্স তত্ত্বৰ উদ্ভাৱন কৰিছিল। এযোৰ চন্দ্ৰবন্ধনী (....) বা বৰ বন্ধনী [......] ৰ মাজত $m \times n$ টা সংখ্যাক m টা শাৰীত আৰু n টা স্তম্ভত কোনো ক্ৰমত সজাই এটা $m \times n$ মাত্ৰা (order) ৰ মেট্ৰিক্স বা মৌলকক্ষ পোৱা যায়। প্ৰতিটো সংখ্যাক মেট্ৰিক্সৰ উপাদান বা মৌল (element) বোলা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে -

(i) 2×1 মাত্ৰাৰ মেট্ৰিক্স : $\underset{2\times1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}}$ বা $\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}}$

(ii) 1×2 মাত্ৰাৰ মেট্ৰিক্স : $\underset{1\times2}{(a_{11} \quad a_{12})}$ বা $\underset{1\times2}{[a_{11} \quad a_{12}]}$

(iii) 3×3 মাত্ৰাৰ মেট্ৰিক্স : $\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}$

বা

$\underset{3\times3}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}$ ইত্যাদি ।

মেট্ৰিক্স আৰু নিৰ্ণায়কৰ মাজৰ পাৰ্থক্য
Difference between Matrix and Determinant

মেট্ৰিক্স আৰু নিৰ্ণায়কৰ মাজত থকা পাৰ্থক্যসমূহ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল -

১. মেট্ৰিক্সত বন্ধনী ব্যৱহাৰ হয় কিন্তু নিৰ্ণায়কত উলম্ব ৰেখা খণ্ডহে ব্যৱহাৰ হয়।

২. মেট্ৰিক্সত শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা সমান নহ'বও পাৰে কিন্তু নিৰ্ণায়কত শাৰী আৰু স্তম্ভৰ

সংখ্যা একে থাকিব লাগিব।

৩. মেট্ৰিক্সৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট মান নাথাকে অৰ্থাৎ সংখ্যাবোৰৰ বিশেষ সজোৱা মাথোন। অন্যহাতে নিৰ্ণায়কৰ এক নিৰ্দিষ্ট মান থাকে।

৪. বিভিন্ন উপাদানৰ স্থান সালসলনি কৰিলে মূল মেট্ৰিক্সৰ বিভিন্ন উপমেট্ৰিক্স সৃষ্টি হয় কিন্তু নিৰ্ণায়কত বিভিন্ন উপাদানৰ স্থান সালসলনি কৰিলেও নিৰ্ণায়কৰ মান পৰিবৰ্তন নহয়।

সাধাৰণতে এটা মেট্ৰিক্সক ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ ডাঙৰ আখৰেৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ i নং শাৰীৰ আৰু j নং স্তম্ভৰ উপাদানটোক সেই বৰ্ণৰ সৰু আখৰৰ লগত ij অনুলগ্ন (suffix) দি নিৰ্দেশ কৰা হয় অৰ্থাৎ a_{ij}।

উদাহৰণস্বৰূপে -

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

ইয়াত a_{12} যে A ৰ 1 নং শাৰী আৰু 2 নং স্তম্ভৰ উপাদানটোক বুজাব।

একেদৰে,

$a_{11} = 2,\ a_{12} = 4$

$a_{21} = 1\ \ a_{22} = 5$

মেট্ৰিক্সৰ প্ৰকাৰ
Types of Matrices

১. শাৰী মেট্ৰিক্স Row Matrix

যি মেট্ৰিক্সত এটাহে মাথোন শাৰী থাকে তাক শাৰী মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}_{1\times2}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}$

২. স্তম্ভ মেট্ৰিক্স Column Matrix

যি মেট্ৰিক্সত এটাহে মাথোন স্তম্ভ থাকে তাক স্তম্ভ মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}_{2\times1}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4\times1}$

৩. শূন্য মেট্ৰিক্স : Zero Matrix or Null Matrix

যি মেট্ৰিক্সৰ প্ৰতিটো উপাদান শূন্য তাক শূন্য মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3}$

৪. উপ মেট্ৰিক্স : Sub Matrix

যদি A এটা মেট্ৰিক্স হয় তেতিয়াহ'লে ইয়াৰ কিছুমান শাৰী বা স্তম্ভ বাদ দিলে, বাকী যি নতুন মেট্ৰিক্স পোৱা যায় তাক উপ মেট্ৰিক্স বোলা হয়। A ও নিজে এটা উপ মেট্ৰিক্স।

উদাহৰণ :

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$

উপমেট্ৰিক্স বোৰ হ'ল :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times2}$ (iii) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}_{1\times2}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{2\times1}$ (v) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times1}$ ইত্যাদি।

৫. সমতুল্য মেট্ৰিক্স : Equal Matrix

দুটা মেট্ৰিক্স সমান হ'ব যদি সিহঁতৰ মাত্ৰা একে আৰু সিহঁতৰ অনুৰূপ উপাদানবোৰ সমানে সমানে একে।

সাংকেতিক ভাৱে-

$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}\ \forall\ i$ আৰু j

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$

তেতিয়াহ'লে A = B

(ii) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{2\times2}$

তেতিয়াহ'লে $A \neq B$

৬. আয়তীয় মেট্ৰিক্স : Rectangular Matrix

যদি এটা মেট্ৰিক্সৰ শাৰীবোৰৰ সংখ্যা, স্তম্ভৰ সংখ্যাত কৈ বেছি হয় বা স্তম্ভৰ সংখ্যা, শাৰীৰ সংখ্যাতকৈ বেছি হয়, তেনে মেট্ৰিক্সক আয়তীয় মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}_{3\times2}$

৭. বৰ্গ মেট্ৰিক্স : Square Matrix

যি মেট্ৰিক্সৰ শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা একে সেই মেট্ৰিক্সক বৰ্গ মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $[1]_{1\times1}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

৭.(ক)একক মেট্ৰিক্স : Identity Matrix or Unit Matrix

যি বৰ্গ মেট্ৰিক্সত প্ৰধান কৰ্ণত থকা অৰ্থাৎ একে নম্বৰৰ শাৰী আৰু স্তম্ভৰ উপাদান (যেনে : $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$) এক আৰু বাকী উপাদানবোৰ শূন্য হয়, সেই মেট্ৰিক্সক একক মেট্ৰিক্স বোলা হয়। দৰাচলতে, ই এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সৰ ৰূপ।

উদাহৰণ :

(i) $[1]_{1\times1}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

একক মেট্ৰিক্সক I বা U ৰে দৰ্শোৱা হয়।

৭.(খ) কৰ্ণ মেট্ৰিক্স : Diagonal Matrix

এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সত থকা প্ৰধান কৰ্ণৰ বাহিৰত থকা আটাইবোৰ মৌল বা উপাদান শূন্য হ'লে, সেই মেট্ৰিক্সক কৰ্ণ মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

৭.(গ)অদিশ মেট্ৰিক্স : Scalar Matrix

এটা কৰ্ণ মেট্ৰিক্সৰ প্ৰধান কৰ্ণত থকা আটাইবোৰ মৌল বা উপাদান সমান হ'লে [অৰ্থাৎ $a_{11} = a_{12} = \ldots\ldots = a_{mn} = k$ (অদিশ)] তেনে মেট্ৰিক্সক অদিশ মেট্ৰিক্স বোলা হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

একক মেট্ৰিক্সো এটা অদিশ মেট্ৰিক্স হয়।

৭.(ঘ)ত্ৰিভূজ মেট্ৰিক্স : Triangular Matrix

এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সকক ত্ৰিভূজ মেট্ৰিক্স বুলিব পাৰি যদিহে প্ৰধান কৰ্ণৰ তলফালে বা ওপৰফালে থকা মৌল বা উপাদানবোৰৰ মান শূন্য হয়।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}_{3\times3}$

৭.(ঙ) সমপৰিমিত মেট্ৰিক্স : Symmetrical Matrix

এটা মেট্ৰিক্সক সমপৰিমিত মেট্ৰিক্স ক'ব পৰা যায় যদিহে ই এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্স আৰু $a_{ij} = a_{ji}$ হয়। গতিকে যদি মেট্ৰিক্স : $A^T = A$, তেন্তে A মেট্ৰিক্সক সমপৰিমিত মেট্ৰিক্স বোলা হয়। এই দৃষ্টিৰে চালে একক, কৰ্ণ আৰু অদিশ মেট্ৰিক্স বোৰক সমপৰিমিত মেট্ৰিক্স বুলিব পাৰি।

উদাহৰণ :

(i) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ (iv) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

৭.(চ) সদৃশ মেট্ৰিক্স : Idempotent Matrix

এটা সদৃশ মেট্ৰিক্স হ'ল এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্স য'ত $A^T = A$ আৰু $AA = A$(বা $A^2 = A$)। একক মেট্ৰিক্সক এটা সদৃশ মেট্ৰিক্স বুলিব পাৰি।

উদাহৰণ :

(i) $A = [1]$ কাৰণ (a) $\overset{A}{[1]} \times \overset{A}{[1]} = \overset{A}{[1]}$

(b) $A = [1], \quad A^T = [1], \quad \therefore A^T = A$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

কাৰণ (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore A^T = A$

৭.(ছ) বৰ্গ মেট্ৰিক্সৰ নিৰ্ণায়ক:Determinant of a square Matrix

এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সৰ শাৰী আৰু স্তম্ভবোৰৰ দ্বাৰা গঠিত নিৰ্ণায়কক মেট্ৰিক্সটোৰ নিৰ্ণায়ক বোলা হয়। A মেট্ৰিক্সৰ নিৰ্ণায়ক $|A|$ ৰ দ্বাৰা দৰ্শোৱা হয়।

উদাহৰণ :

(i) যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, তেন্তে $|A| = ?$

সমাধান :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(5) = 8 - 5 = 3$$

৭.(জ) ক্ষীয়মান বা অপ্ৰতিমমেট্ৰিক্স :Singular Matrix

এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সক ক্ষীয়মান বা অপ্ৰতিম মেট্ৰিক্স বুলিব পাৰি যদিহে মেট্ৰিক্সটোৰ নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্যৰ সমান অৰ্থাৎ $|A| = 0$ ।

উদাহৰণ :

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \times 4) - (2 \times 6) = 12 - 12 = 0$$

৭.(ঝ) অক্ষীয়মান বা প্ৰতিম মেট্ৰিক্স : Non-singular Matrix

এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্সক অক্ষীয়মান বা প্ৰতিম মেট্ৰিক্স বুলিব পাৰি যদিহে মেট্ৰিক্সটোৰ নিৰ্ণায়কৰ মান শূন্যৰ সমান নহয় অৰ্থাৎ $|A| \neq 0$ ।

উদাহৰণ :

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 21 = -20$$

৭. (ঞ) ট্ৰেচ : Trace

এটা বৰ্গ মেট্ৰিক্স A ৰ কৰ্ণত থকা উপাদানসমূহৰ সমষ্টি অৰ্থাৎ $(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$ ক A মেট্ৰিক্সৰ ট্ৰেচ বুলি কোৱা হয়। ট্ৰেচ নিৰ্ণয়ন কৰা সম্ভৱ কেৱল বৰ্গ মেট্ৰিক্সৰ ক্ষেত্ৰতহে।

উদাহৰণ :

i) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

$$\therefore Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

ii) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

$$\therefore Tr(B) = 4 + (-4) + 4 = 4$$

ট্ৰেচৰ বিধিসমূহ :Laws of Trace

ট্ৰেচৰ বিধিসমূহ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল -

i) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

ii) $Tr(A - B) = Tr(A) - Tr(B)$

iii) $Tr(KA) = K\,Tr(A)$

iv) $Tr(AB) = Tr(BA)$